

МАТЕМАТИКА

Распространение волн в вязкоупругих пластинках переменной толщины

Марасулов Абдурахим Мустафаевич, доктор технических наук, доцент;
 Насырла Дана Насырлаевна, магистрант
 Международный казахско-турецкий университет имени Х. А. Яссави (г. Туркестан)

В этой работе описывается методика решения задач и численных результатов о распространении волн в бесконечных протяженных пластинках переменной толщины. Вязкие свойства материала учитываются с помощью интегрального оператора Вольтера. Исследование проводится в рамках пространственной теории вязкой упругости. Методика основана на разделении пространственных переменных и формулировании краевой задачи на собственные значения, которые решаются методом ортогональной прогонки Годунова. Получены числовые значения реальной и мнимой части фазовой скорости в зависимости от волновых чисел. При этом получено совпадение числовых результатов с известными данными.

Ключевые слова: пластинка, переменная толщина, вязкие свойства, ортогональная прогонка, фазовая скорость, волна.

Известно [7, 8], что нормальные волны в деформируемом слое (волны Лэмба) не ортогональны по толщине слоя, т. е. интеграл от скалярного произведения векторов смещений двух различных волн, рассматриваемых как функции координаты, перпендикулярной поверхностям слоя, не равен нулю. Они также не ортогональны сопряженным волнам, получающимся из рассмотрения сопряженной задачи. Это обстоятельство вносит дополнительные трудности при решении практических задач [2, 4, 9]. В этой работе построена сопряженная спектральная задача и условия биортогональности для рассматриваемой задачи.

Математическая постановка задачи

Рассматриваем вязкоупругий волновод в виде бесконечной вдоль оси X_1 переменной толщины (рис. 1). Основные соотношения классической теории пластин переменной толщины можно получить на основе принципа возможных перемещений. Вариационное уравнение задачи теории вязкоупругости в трехмерной постановке имеет вид

$$\iiint_V (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho u_i \delta u_i) dx_3 dx_2 dx_1 = 0 \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \tag{1}$$

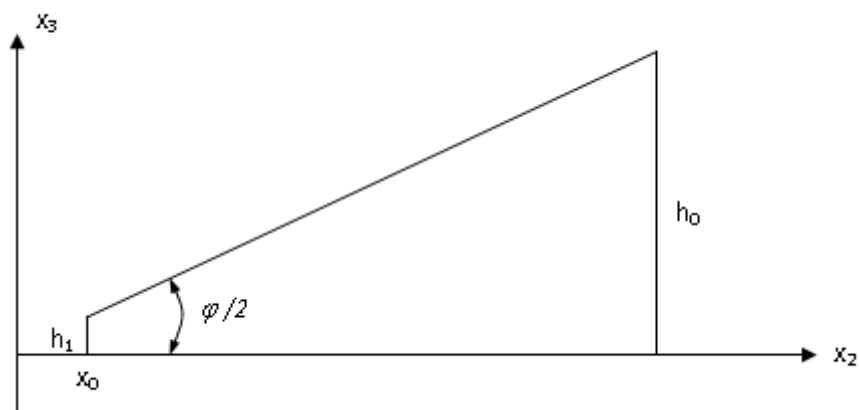


Рис. 1. Расчетная схема пластин переменной толщины

где ρ — плотность материала; u_i — компоненты перемещений; σ_{ij} и ε_{ij} — компоненты тензора напряжений и деформаций; V — объем, занимаемый телом. В соответствии с гипотезами Кирхгофа-Лява

$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0, \quad u_i = -x_3 \frac{\partial W}{\partial x_i} \tag{2}$$

Пренебрегая в (1) членами, учитывающими инерцию вращения нормали к срединной плоскости, будем иметь следующее вариационное равенство:

$$\int_S ds \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \delta \varepsilon_{12} + \sigma_{22} \delta \varepsilon_{22}) dx_3 + \int_S ds \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \delta W dx_3 = 0 \tag{3}$$

Исходя из геометрических соотношений и соотношений обобщенного закона Гука с учетом кинематических гипотез (2) выражения для компонент тензоров деформаций и напряжений имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - x_3 \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = 1, 2; \tag{4}$$

$$\sigma_{11} = \frac{\tilde{E}}{1-\nu} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}); \quad \sigma_{22} = \frac{\tilde{E}}{1-\nu} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11});$$

$$\sigma_{12} = \frac{\tilde{E}}{1+\nu} \varepsilon_{12},$$

где \tilde{E} — операторный модуль упругости, который имеет вид [5]:

$$\tilde{E} \varphi(t) = E_{01} \left[\varphi(t) - \int_{-\infty}^t R_E(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right] \tag{5}$$

$\varphi(t)$ — произвольная функция времени; $R_E(t-\tau)$ — ядро релаксации; E_{01} — мгновенный модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона, предлагается, что постоянная величина; принимаем интегральные члены в (5) малыми, тогда функции $\varphi(t) = \psi(t) e^{-i\omega_R t}$, где $\psi(t)$ — медленно меняющаяся функция времени, ω_R — действительная константа. Далее, применяя процедуру замораживания [1], заменим соотношения (2) приближенными вида:

$$\bar{E} \varphi = \lambda_m [1 - \Gamma^C(\omega_R) - i\Gamma^S(\omega_R)] \varphi.$$

Здесь $\Gamma_E^C(\omega_R) = \int_x^\infty R(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau$, $\Gamma_E^S(\omega_R) = \int_0^\infty R_\lambda(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau$ — соответственно косинус и синус - образы

Фурье ядра релаксации материала.

Вводя обозначение для моментов

$$M_{11} = D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} \right); M_{22} = D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} \right); M_{12} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2}; D = \frac{\bar{E} h^3}{12(1-\nu^2)}$$

и интегрируя по толщине полосы, приведем равенства (3) ее к следующему виду

$$\int_S \left(M_{11} \frac{\partial^2 \delta W}{\partial x_1^2} + 2M_{12} \frac{\partial^2 \delta W}{\partial x_1 \partial x_2} + M_{22} \frac{\partial^2 \delta W}{\partial x_2^2} \right) ds - \int_S \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \delta W ds = 0 \tag{6}$$

Интегрируя дважды по частям и приравнявая к нулю коэффициенты при вариациях δW внутри тела и на его границе, получаем следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2^2} + \rho h \ddot{W} = 0, \quad (\ddot{w} = \partial^2 w / \partial t^2) \tag{7}$$

с естественными граничными условиями

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial x_2} = 0 \\ W = 0; x_2 = 0 : l_2 \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial x_1} = 0 \\ W = 0: \end{cases} \quad x_1 = 0; l_1 \quad (9)$$

и главными альтернативными к ним

$$\begin{cases} M_{22} = 0 \\ \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} = 0; \end{cases} \quad x_2 = 0; \quad l_2 \quad (10)$$

$$\begin{cases} M_{11} = 0 \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} = 0; \end{cases} \quad x_1 = 0; l_1 \quad (11)$$

Для построения спектральной задачи введем следующую замену переменных:

$$W=W; \quad \varphi = \frac{\partial W}{\partial x_2}; \quad M = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} \right); \quad Q = \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} \quad (12)$$

Подставляя (12) в (7), получим систему дифференциальных уравнения в частных производных, разрешенную относительно первых производных по x_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x_1^2} + D'(1-\nu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= 0; \\ \frac{\partial M}{\partial x_2} - Q - D''(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} &= 0; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{1}{D} M + \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_2} - \varphi = 0:$$

и альтернативные граничные условия на $x_2 = 0; x_2 = l_2$:

$$\varphi = 0 \quad \text{или} \quad M - D(1-\nu) \frac{\partial^2 M}{\partial x_1^2} = 0; \quad (14)$$

$$W = 0 \quad \text{или} \quad Q + D(1-\nu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = 0 \quad \text{и на } x_1=0, x_1=l_1,$$

$$\varphi = 0 \quad \text{или} \quad M - D(1-\nu) \frac{\partial^2 M}{\partial x_1^2} = 0 \quad W = 0 \quad \text{или} \quad Q + D(1-\nu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = 0 \quad (15)$$

Рассмотрим теперь бесконечную вдоль оси x_1 полосу с произвольным законом изменения толщины* $h=h(x_2)$. Будем искать решение задачи (13) - (15) в виде

$$(Q, M, \varphi, W)^T = (\bar{Q}, \bar{M}, \bar{\varphi}, \bar{W})^T e^{i(\alpha x_1 - \alpha t)} \quad (16)$$

описывающие гармонические плоские волны, распространяющиеся вдоль оси x_1 . Подставляя (16) в (13), получим дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производных

$$\begin{cases} \bar{Q}' - \alpha^2 \bar{M} - \alpha^2 D(1-\nu) \bar{\varphi} - \rho h \omega^2 \bar{W} = 0; \\ \bar{M}' - \bar{Q} + \alpha^2 D'(1-\nu) \bar{W} = 0; \\ \bar{\varphi}' - \frac{1}{D} \bar{M} - \alpha^2 \bar{W} = 0; \\ \bar{W}' - \bar{\varphi} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

с граничными условиями на торцах полосы $x_2=0, l_2$, одного из четырех типов:

$$\text{шарнирное опирание: } \overline{W} = \overline{M} = 0; \quad (18)$$

$$\text{скользящий зажим: } \overline{Q} = \overline{\varphi} = 0 \quad (19)$$

$$\text{жесткая заделка: } \overline{W} = \overline{\varphi} = 0 \quad (20)$$

$$\text{свободный край: } \begin{cases} \overline{M} + \alpha^2 D(1-\nu)\overline{W} = 0 \\ \overline{Q} - \alpha^2(1-\nu)D\overline{\varphi} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Таким образом, сформулирована спектральная задача (17 - 21) по параметру α^2 , описывающая распространение изгибных плоских волн в волноводе, выполненном в виде полосы с произвольным законом изменения толщины по координате x_2 . Показано, что спектральный параметр α^2 принимает только действительные значения (при $R_E = 0$).

Преобразуя для этого систему (17), имеем:

$$\overline{Q}' = \overline{M}'' + D''(1-\nu)\alpha^2\overline{W} + D'(1-\nu)\alpha^2\overline{\varphi}, \text{ откуда}$$

$$M'' + D''(1-\nu)\alpha^2\overline{W} - \alpha^2\overline{M} - \rho h\omega^2\overline{W} = 0$$

Кроме того:

$$\overline{W}'' - \frac{1}{D}\overline{M} - \alpha^2\overline{W} = 0$$

Таким образом, преобразованная система имеет вид:

$$\begin{cases} M'' - \alpha^2\overline{M} - (\rho h\omega^2 - D''(1-\nu)\alpha^2)\overline{W} = 0 \\ W'' - \alpha^2\overline{W} - \frac{1}{D}\overline{M} = 0 \end{cases} \quad (22)$$

Граничные условия (18–21) в переменных $\overline{W}, \overline{M}$ имеют вид:

$$\text{шарнирное опирание: } \overline{W} = \overline{M} = 0; \quad (23)$$

$$\text{скользящий зажим: } \overline{W}'' = \overline{M}' - \alpha^2 D'(1-\nu)\overline{W} = 0; \quad (24)$$

$$\text{жесткая заделка: } \overline{W} = \overline{W}' = 0 \quad (25)$$

$$\text{свободный край: } \overline{M}' + \alpha^2 D(1-\nu)(\overline{W})' = 0, \overline{M}' - \alpha^2(1-\nu)(D\overline{W})' = 0 \quad (26)$$

при $x_2=0$ или $x_2=+e_2$

Пусть \overline{M} и \overline{W} некоторые собственные функции системы (22)-(26), возможно комплексное значение. Помножим уравнения системы (22) на \hat{M} и \hat{W} , комплексно сопряженные к функциям \overline{M} и \overline{W} . Тождественно преобразовав первое уравнение, проинтегрируем полученные равенства по x_2 и составим следующую линейную комбинацию:

$$\begin{aligned} & \left[\overline{M}' - \alpha^2(1-\nu)(D\overline{W})' \right] \overline{W} \Big|_0^{l_2} + \left[M + \alpha^2(1-\nu)DW \right] \overline{W}' \Big|_0^{l_2} \\ & - \int_0^{l_2} (\overline{M}'W' + M\overline{W}') dx_2 - \alpha^2 \int_0^{l_2} (\overline{W}M + W\overline{M}) dx_2 - \\ & - \int_0^{l_2} \frac{\overline{M}M}{D} dx_2 - \omega^2 \int_0^{l_2} \rho h \overline{W}W dx_2 - 2\alpha^2(1-\nu) \int_0^{e_2} D'' \overline{W}W' dx_2 + \alpha^2(1-\nu) \int_0^{e_2} D'(\overline{W}W)' dx_2 = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Легко убедиться, что члены, не входящие в интегралы равенства (27), обращаются в нуль при любой комбинации граничных условий (23)-(26). Необходимо заметить также, что все подинтегральные функции действительны. Выражая α^2 из (27), получим ($R_E = 0$), что

$$\alpha^2 = \frac{\int_0^{l_2} (\overline{M}'W' + M\overline{W}') dx_2 + \int_0^{l_2} \frac{\overline{M}M}{D} dx_2 + \omega^2 \int_0^{l_2} \rho h \overline{W}W dx_2}{\int_0^{l_2} (\overline{M}W + M\overline{W}) dx_2 - 2(1-\nu) \int_0^{l_2} D'' \overline{W}W' dx_2 - (1-\nu) \int_0^{l_2} D'(\overline{W}W)' dx_2} - \text{действительное число.}$$

Таким образом показано, что квадрат собственного волнового числа для бесконечной полосы переменной толщины действителен при любой комбинации граничных условий.

Заключение

1. На основе вариационного уравнения теории упругости предложена математическая постановка задачи о распространении волн в протяженных пластинках переменной толщины. Получены системы дифференциальных уравнений с соответствующим граничным условием.

2. Установлено, что квадрат собственного волнового числа для бесконечной полосы переменной толщины действителен при любой комбинации граничных условий.

3. Сформулированная спектральная задача не является самосопряженной. Построена для нее сопряженная задача. Сопряженная система состоит из обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующим граничным условием. С помощью формулы Лагранжа получены условия биортогональности форм. Поставленная задача решается численно, методом ортогональной прогонки С. К. Годунова в сочетании с методом Мюллера.

Литература:

1. Бозоров, М. Б.; Сафаров, И. И.; Шокин, Ю. И. Численное моделирование колебаний диссипативно однородных и неоднородных механических систем. СО РАН, Новосибирск, 1996. — 188 с.
2. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. — 639 с.
3. Годунов, С. К. О численных решениях краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — Успехи математических наук, 1061, Т. 16, вып. 3, — С 171–174.
4. Гринченко, В. Т.; Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. К.: Наука думка, 1981. — 283 с.
5. Колтунов, М. А. Ползучесть и релаксация. М.: Высшая школа, 1976. —
6. 276, с.
7. Неймарк, М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. — 526 с.
8. Сафаров, И. И.; Болтаев, З. И. Распространение гармонических волн в пластинке переменной толщины. Изв. высших учебных заведений. Поволжский регион. Серия: физ.-мат. науки, № 4, 2011. — с. 31–39.
9. Сафаров, И. И.; Тешаев, М. Х.; Болтаев, З. И. Волновые процессы в механическом волноводе. LAP LAMBERT Academic publishing (Германия). 2012. — 217 с.
10. Сунчалиев, Р. М.; Филатов, А. О некоторых методах исследования нелинейных задач теории вязкоупругости // ДАН СССР, 1972. — № 1. с. 201–203.